Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2016
Algebra lineare

Supporti consentiti

I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

1. Fibonacci

La successione di Fibonacci $\{F_0, F_1, F_2, \ldots\}$ è definita dalla formula ricorsiva $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per ogni $n \in \mathrm{N}$ con $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$.

a. Dimostra che $\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Calcola gli autovalori e gli autovettori di A.

c. Dimostra che, indicando con φ l'autovalore più grande, l'altro autovalore è pari a $-\varphi^{-1}$. Verifica quindi che $\varphi - \varphi^{-1} = 1$.

d. Dati $S = \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\Lambda = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}$ dimostra che $A = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$.

e. Calcola A^n.

f. Dimostra che $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$.

g. Calcola F_{10} con la formula data (utilizza la calcolatrice) e verifica la correttezza del risultato tramite la formula ricorsiva.

2. Comprensione algebrica e geometrica

Per ognuna delle seguenti affermazioni, indica se è vera o falsa. Se si tratta di una affermazione corretta, fornisci un esempio. Se si tratta di una affermazione falsa, formula un controesempio, ovvero un esempio che smentisce l'affermazione.

a. Un sistema con più incognite che equazioni possiede sempre almeno una soluzione.
b. Un sistema con più equazioni che incognite è impossibile.
c. La traccia di una matrice invertibile è diversa da zero.
d. Una matrice non invertibile ha almeno un autovalore uguale a zero.
e. In R^4 quattro vettori sono sicuramente linearmente dipendenti.
f. In R^4 quattro vettori sono sicuramente linearmente indipendenti.
g. Due rette in R^2 hanno di sicuro almeno un punto in comune.
h. Due rette in R^3 non hanno di sicuro un punto in comune.
i. In R^3 l'intersezione di un piano con una sfera corrisponde a un punto oppure a una circonferenza.
j. Se A è una matrice invertibile, allora, per ogni $n \in \mathrm{N}$, A^n è una matrice invertibile.

3. Geometria analitica

È data la sfera $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$.

a. Trova centro e raggio della sfera.
b. Trova un punto A interno alla sfera, un punto B sulla superficie della sfera e un punto C esterno alla sfera.
c. Trova una retta passante per il punto $D(-2,-2,1)$ che non interseca la sfera data.
d. Trova una retta passante per il punto $D(-2,-2,1)$ che interseca la sfera data in un solo punto.
e. Trova una retta passante per il punto $D(-2,-2,1)$ che interseca la sfera data in più di un punto.