Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2017
Algebra lineare

Supporti consentiti
I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

1. Geometria analitica

È data la retta

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a. Verifica che il punto $A = (2; -5/2; 3)$ appartiene alla retta.
b. Dato il punto $B = (2; -1/2; 2)$, costruisci il vettore $\overrightarrow{AB}$ e verifica che $\overrightarrow{AB} \perp r$. Definisci dunque la retta t passante per A e parallela a $\overrightarrow{AB}$.
c. Costruisci la retta s, passante per A e perpendicolare a r e a t.
d. Sia S una sfera di raggio $R = 4$ con centro in A. Scrivi l'equazione della sfera S.
e. Rappresenta in uno schizzo la sfera S e le rette r, s e t.
f. Come si possono trovare le intersezioni delle tre rette con la sfera utilizzando solo le coordinate di A, il raggio della sfera e i vettori-direzione delle tre rette? Spiega a parole e/o con un disegno e calcola un caso.

2. Sistemi lineari

Vero o falso? Motiva la tua risposta.

a. Il sistema di equazioni $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ ha infinite soluzioni.

b. Il sistema $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$ è impossibile.

c. $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -1\\ 4\\ 9\end{pmatrix}$.

d. $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

e. Il sistema $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ ha infinite soluzioni.

3. Applicazioni lineari e matrici

Dato un piano α passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\vec{v}$, le matrici

$$S = I - 2\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}^T}{\vec{v}^T\cdot\vec{v}} \quad \text{e} \quad P = I - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}^T}{\vec{v}^T\cdot\vec{v}}$$

Sono rispettivamente la matrice di simmetria e la matrice di proiezione rispetto al piano α.

a. Dato $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, calcola S e P.

b. Verifica che $S\cdot\vec{v}=-\vec{v}$ e $P\cdot\vec{v}=\vec{0}$. Interpreta il risultato a parole.

c. Calcola $S\cdot P$ e $P\cdot S$. Come interpreti i risultati?

d. Determina S^{-1}.

e. Gli auto valori di una delle due matrici sono $\lambda_1=\lambda_2=1$ e $\lambda_3=0$. Di quale matrice stiamo parlando? Motiva la risposta.

f. Determina per la matrice del punto precedente l'autospazio per $\lambda_3=0$. Come giustifichi il risultato?