Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2018

Algebra Lineare

Cognome e Nome del candidato: ……………………………………………….

Punti: ……………….. (max 60 punti)

Valutazione: ………………..

Supporti consentiti
I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

1. Geometria analitica

In $\boldsymbol{R}^3$, considera

il piano $p : kx - y + z - 1 = 0$ (con variabili x, y, z e parametro reale k)

e la retta $r : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$.

a) Scrivi la forma parametrica del piano p e della retta r.

b) Stabilisci per quali valori di $k \in \boldsymbol{R}$ la retta ed il piano sono incidenti.

c) Stabilisci per quali valori di $k \in \boldsymbol{R}$ la retta è parallela al piano.

d) Stabilisci per quali valori di $k \in \boldsymbol{R}$ la retta è contenuta nel piano.

e) Stabilisci per quali valori di $k \in \boldsymbol{R}$ la retta e il piano sono perpendicolari tra loro.

g) Stabilisci per quali valori di k il piano p è tangente alla sfera di equazione

S: $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 9$

2. Applicazioni lineari e matrici

Sono date le seguenti matrici, che descrivono delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{R}^2$ a $\boldsymbol{R}^2$ di vettori sul piano:

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$Q_\theta = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Rotazione di centro *O*(0;0) e di un angolo θ in senso orario

$$H_\theta = \begin{bmatrix} 2(cos(\theta))^2 - 1 & 2cos(\theta)sin(\theta) \\ 2cos(\theta)sin(\theta) & 2(sin(\theta))^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Riflessione rispetto alla retta passante per *O*(0;0) e che forma un angolo θ con l'asse delle ascisse

a) Cosa accade ad un vettore qualsiasi $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ se gli applichiamo la trasformazione lineare D? Ossia cosa descrive geometricamente la matrice D?

b) A cosa corrisponde, come trasformazione nel piano, la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$? Ossia cosa accade (geometricamente) al vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ se applico la matrice T ?

c) Dimostra che la matrice Q_θ è sempre invertibile. Trova la sua inversa generica Q_θ^{-1}.

d) Calcola $H_{30°}$ e $H_{30°}^{-1}$. Che significato dare a questi risultati, sia dal punto di vista geometrico che algebrico?

e) È vero che applicare ad un punto del piano dapprima $H_{90°}$ ed in seguito $H_{0°}$ corrisponde ad applicare dapprima $H_{0°}$ ed in seguito $H_{90°}$? La moltiplicazione di matrici 2x2 è commutativa?

f) Cosa accade ad un quadrato *KLMN* del piano se gli applichiamo la matrice $S = \begin{bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} & -\frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$?

g) Che significato geometrico si può dare alla matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? Dimostra che $P^n = P$ (per ogni $n \in \boldsymbol{N}^*$) e motiva geometricamente questo risultato.

3. Sistemi lineari, combinazione lineare, dipendenza lineare, matrice inversa

È dato il seguente sistema lineare in forma matriciale $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$, con:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & a & b \end{bmatrix}$ (a e b sono parametri reali)

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (vettore delle incognite)

$\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ (vettore dei termini noti)

a) Poni $a = 4$ e $b = 9$. Stabilisci l'insieme delle soluzioni del sistema utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss.

b) Stabilisci per quali valori di a e b la matrice A possiede l'inversa.

c) Stabilisci per quali valori di a e b il sistema lineare è determinato e ammette una sola soluzione.

d) Poni $a = -2$ e $b = 1$. Stabilisci l'insieme delle soluzioni del sistema.

e) Per quali valori di a e b le colonne della matrice A formano una base di $\boldsymbol{R}^3$?

f) Poni $a = 2$. Stabilisci a quali condizioni la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & b-5 \end{bmatrix}$$

è l'inversa di A.
Risolvi il sistema lineare associato $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ utilizzando la matrice inversa B di A.

4. Applicazioni lineari e matrici, autovalori e autovettori

Considera l'applicazione lineare f: $\boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ con

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \qquad \text{e} \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Stabilisci se f è iniettiva.

b) Siano $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcola $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ e $f(\vec{e}_3)$ e stabilisci $Im(f)$.

c) Stabilisci $ker(f)$.

d) Trova gli autovalori della matrice A.

e) Verifica che la somma degli autovalori è uguale alla traccia di A.

f) Stabilisci se $\vec{v}=\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore della matrice A.