Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2019

Algebra lineare

Cognome e Nome del canditato: ……………………………………………….

Punti: ………………..

Valutazione: ………………..

Supporti consentiti

I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

Esercizio 1 (sistemi lineari)

È dato il seguente sistema lineare (con parametro *k*):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 - kx_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k \end{cases} .$$

a) Scrivi il sistema nella forma matriciale $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

b) Risolvi il sistema nel caso in cui $k = -2$.

c) Dimostra che l'inversa della matrice *A* è:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{1-k}{2k+2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{-1}{k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) Risolvi il sistema parametrico, discutendo relativamente al parametro *k*, indicando con precisione l'insieme delle soluzioni.

e) Risolvi il sistema omogeneo parametrico associato $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

Esercizio 2 (sistemi lineari)

Sono date le matrici quadrate A, B, E del tipo 3x3. Per ognuna delle seguenti affermazioni, indica se è vera o falsa, giustificando in modo esauriente la tua risposta.

Nota: con I viene indicata la matrice identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con 0 la matrice nulla $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con A^t la matrice trasposta di A, con A^{-1} la matrice inversa di A.

a) $A^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad (I + A)\cdot(I - A) = 0$

b) $A^2 = B^2 \quad \Leftrightarrow \quad (A + B)\cdot(A - B) = 0$

c) Se $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora $A^{-1}= I - E + E^2$

d) Per qualsiasi matrice A (non singolare) del tipo 3x3 vale: $det\,((-1)\cdot A^t \cdot A^{-1} \cdot (A^{-1})^2) = det\,(A^2)$

e) Per qualsiasi matrice B del tipo 3x3 vale: $det\,(B^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = 0$

Esercizio 3 (geometria analitica)

Sono dati i due piani nello spazio:

$$\pi:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot s + \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \pi':\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot s + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathrm{R})$$

a) Dimostra che la retta $r = \pi \cap \pi'$ è data dalla forma parametrica:

$$r:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot k + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathrm{R})$$

b) Trova il punto di intersezione A tra la retta r e il piano definito dagli assi cartesiani O_x e O_z.

c) Trova la forma parametrica della retta t, sapendo che è parallela alla retta r e che passa per l'origine degli assi.

d) Trova la forma cartesiana del piano β, sapendo che è perpendicolare sia al piano π che al piano π', e che passa per il punto A.

e) Sia B il punto di intersezione tra il piano β e la retta t. Trova l'equazione della sfera con centro nel punto A e passante per il punto B.

Esercizio 4 (applicazioni lineari e matrici, autovalori e autovettori)

Considera l'applicazione lineare $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$

a) Rappresenta l'applicazione f tramite la matrice A, quindi in modo che $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

b) Determina gli autovalori e gli autovettori di A.

c) Stabilisci se la matrice A^t (la trasposta di A) possiede gli stessi autovalori di A.

d) Stabilisci se la matrice A^t (la trasposta di A) possiede gli stessi autovettori di A.

e) Dimostra che, per la matrice A, vale: "se λ è un autovalore di A, allora λ^2 è un autovalore di A^2".

Più in generale dimostra che, "se λ è un autovalore di una matrice M, allora λ^2 è un autovalore di M^2".