

## SUPSI

# Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2017

Analisi

Supporti consentiti

I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

### 1. Limiti di funzioni

Calcola:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x = \quad \alpha \in \mathbf{R}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{\cot x} =$

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) =$

### 2. Derivate

Determina  $a$  e  $b$  tali che  $f$  sia derivabile in  $\mathbf{R}$ :

a.  $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{per } x \leq \pi \\ ax + b & \text{per } x > \pi \end{cases}$

b.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & \text{per } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{per } x > 1 \end{cases}$

### 3. Integrali

Calcola

a.  $\int_1^2 \frac{3x+2}{x^2+3x+2} dx$

b.  $\int_0^1 (3x^2+2x)e^{x^3+x^2} dx$

c.  $\int_1^e \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1-\ln x}} dx$

### 4. Numeri complessi

Determina

- il luogo geometrico dei punti del piano di Gauss descritto da  $|z-1|=|z-i|$ .
- la parte immaginaria di  $(\sqrt{3}+i)^{93}$ .

### 5. Studio di funzione e altro

Data la funzione  $f(x) = \sin(x^2)$  nell'intervallo  $[0; \sqrt{\pi}]$ :

- determina
  - le intersezioni con gli assi;
  - massimi e minimi;
  - gli intervalli in cui  $f$  è crescente e decrescente;
  - rappresenta il grafico di  $f$  considerando tutte le informazioni ricavate nei punti precedenti.
- calcola il volume del corpo ottenuto facendo rotare intorno all'ordinata l'area racchiusa tra  $y = +f(x)$  e  $y = -f(x)$ .

## 6. Equazione differenziale

Risolvi il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = t^2 x \cdot (\ln x)^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- a. Per  $x_0 = e$
- b. Per  $x_0 = 1$

## 7. Applicazione delle derivate

Data una funzione derivabile  $f$  e un punto  $P = (x_0; y_0)$ , dimostra che per il punto  $X$  appartenente alla curva  $y = f(x)$  la cui distanza è minima da  $P$  vale che la retta di congiunzione tra  $X$  e  $P$  è perpendicolare alla tangente alla curva in  $X$ . (aiutati con uno schizzo e poi dai una dimostrazione matematica).