Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento tecnologie innovative

SUPSI

Master in insegnamento della matematica nella scuola media

Esame di Ammissione 2019

Analisi

Cognome e Nome del canditato: ……………………………………………….

Punti: ………………..

Valutazione: ………………..

Supporti consentiti

I materiali ausiliari ammessi sono una calcolatrice senza funzionalità CAS (Computer Algebra System) e un formulario matematico.

1. Equazioni e disequazioni

Risolvi:

a. $2\sin^2 x = \cos x + 1$

b. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} \leq 2$

c. $z^4 - (1+i) z^2 + i = 0 \qquad z \in \mathbb{C}$

d. $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} < 0$

2. Limiti di funzioni

Calcola:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln \sqrt{x+1}}{x} =$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{1 - \cos x} =$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2^x - x^2\right) =$

3. Derivate e integrali

Calcola la derivata della funzione $f(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2} dt$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

4. Studio di funzione

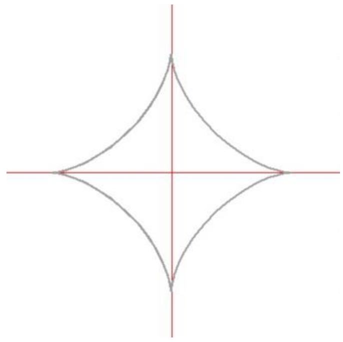
Data la funzione $f(x) = x \cdot ln^2(x)$, determinare:

a. il dominio;
b. i punti di minimo e massimo
c. e indicare se si tratta di estremi locali o globali;
d. punti di flesso.

5. Calcoli approssimati

Determinare (con un metodo a scelta) il valore di $\sqrt{5}$ con 3 cifre significative esatte senza l'uso della funzione radice (potenza, esponenziale, logaritmo) sulla calcolatrice. Verifica poi (sempre senza l'uso delle funzioni citate della calcolatrice) che la precisione richiesta è stata raggiunta.

6. Applicazioni degli integrali



L'asteroide in figura è descritto dall'equazione cartesiana

$y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$ oppure dall'equazione parametrica $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$.

a. Verifica che le due descrizioni sono equivalenti.
b. Calcola la lunghezza dell'asteroide.

7. Equazione differenziale[1]

Un recipiente di forma cubica e di base orizzontale è pieno di acqua. L'acqua scola da un piccolo foro situato alla base del recipiente e, ad ogni istante t (espresso in minuti), la velocità con cui varia l'altezza h (espressa in centimetri) dell'acqua nel recipiente è direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza dell'acqua rimanente. Ciò è espresso dall'equazione differenziale:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h} \text{ con } k > 0$$

Nell'istante in cui l'altezza dell'acqua è 100cm, la velocità $\frac{dh}{dt}$ con cui varia questa altezza vale 10/3 cm/min

a. Verifica che, in tali condizioni, è $k = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\text{cm}}}{\text{min}}$.
b. Determina la soluzione generale dell'equazione differenziale che ottieni per tale valore di k.
c. Si sa che $h = 100$ cm quando $t = 0$; determina la relazione tra h e t che verifica questa condizione iniziale.
d. Determina infine in quale istante il recipiente è vuoto.

[1] Tratto da *Modelli e equazioni differenziali, www.edatlas.it*